Πανελλαδικές Εξετάσεις Επαγγελματικών Λυκείων
(Γ Ημερήσιων – Δ Εσπερινών – Αυτοτελών Τμημάτων & Τμημάτων Συνδιδασκαλίας)

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά (Άλγεβρα)**

Ημερομηνία: **8 Ιουνίου 2019**

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} 1=1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$.

Α2.

α) Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές, όταν οι τιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί. Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε:

Διακριτές και συνεχείς

β) Διακριτές ονομάζονται οι ποσοτικές μεταβλητές, όταν παίρνουν τιμές από το σύνολο των φυσικών (N), ακεραίων (Z), ή ρητών (Q) αριθμών.

Συνεχείς ονομάζονται οι ποσοτικές μεταβλητές, όταν μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών.

Α3.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. Ισχύει: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$ όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και $s = 2$. Οπότε $0{,}2 = \frac{2}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow |\bar{\chi}| = 10$.

Επειδή οι τιμές του δείγματος είναι θετικοί αριθμοί ισχύει $\bar{x} = 10$.

Β2. Είναι: $\bar{x} = \frac{1}{6}(11 + 7 + \kappa + 13 + 11 + 10) \Leftrightarrow 6 \cdot 10 = 52 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 8$

Β3. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι: $7, 8, 10, 11, 11, 13$

Το πλήθος τους είναι άρτιο, οπότε $\delta = \frac{10+11}{2} = 10{,}5$

Το εύρος είναι: $R = 13 - 7 = 6$

Β4. Αφαιρώντας τον αριθμό 2 από κάθε μία από τις παρατηρήσεις, το νέο δείγμα είναι:

$5, 6, 8, 9, 9, 11$

Η νέα μέση τιμή είναι: $\overline{x_1} = \frac{1}{6}(5 + 6 + 8 + 9 + 9 + 11) = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8$

και η διασπορά:

$s = 2$

Άρα $CV = \frac{s}{|\overline{x_1}|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} > \frac{1}{10}$

Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10}\right)^1 = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot (x^2 - 2x + 10)^1$$

$$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. Λύνουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Επίσης $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > \Leftrightarrow x > 1$.

Κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας - ακροτάτων

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 3$.

Άρα για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$.

Γ3. Είναι: $f(5) = 5$ και $f'(5) = \frac{4}{5}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\big(5, f(5)\big)$ είναι:

$$y = f(5) = f'(5) \cdot (x-5) \Leftrightarrow y - 5 = \frac{4}{5}(x-5) \Leftrightarrow 4x - 5y + 5 = 0$$

Γ4. Για $y = 0$ παίρνουμε: $x = -\frac{5}{4}$, δηλαδή: $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

Για $x = 0$ παίρνουμε $y = 1$, δηλαδή $B(0,1)$

Θέμα Δ

Δ1. Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$

Ο πίνακας μονοτονίας για την f είναι:

	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι: $\frac{3}{8} = \frac{9}{24} < \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

Εφόσον f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι: $f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$

Δ2. Είναι: $f'(x) = 3(x-1)^2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2\,(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\big(\sqrt{x}+1\big)\,x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(x-1)x(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x+1})}{x} = 6.$$

Δ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης είναι η παράγωγος $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1)$

Ισχύει $f''(x) = 6x - 6$

Λύνουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Άρα έχουμε τον πίνακα μονοτονίας ακροτάτων για την f'

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	↘		↗

Η f' παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για χ=1.

Για χ=1 η C_f έχει εφαπτομένη με την ελάχιστη κλίση στο σημείο (1,1).

Δ4. Είναι για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$:

$f'(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + \lambda$ με $\lambda \epsilon \mathbb{R}$

με $\Delta = 36 - 12\lambda = 12(3 - \lambda)$.

- Αν $3 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 3$ η $f'(x) = 0$ έχει δύο λύσεις. Η f'αλλάζει πρόσημο και η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
- Αν $3 - \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3$ τότε $f'(x) \geq 0$ με το $=$ να ισχύει για ένα σημείο X_o.

Τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Άρα η ελάχιστη τιμή του λ είναι η $\lambda = 3$.

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!