ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεωρία σελ 186 σχολικό

Α2 Θεωρία σελ 142 σχολικό

Α3 Θεωρία σελ 161 σχολικό

Α4 α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1 $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ και } x \leq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Άρα $D_{f\circ g} = [0, 1]$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x}^2 - 1)^2 = (x-1)^2$

Β2 $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$ συνεχής ως πολυωνυμική

η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και

$h'(x) = 2(x-1) < 0$ για $x \in (0, 1)$. Άρα h είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[0, 1]$ καθώς h συνεχής στο $[0, 1]$

Το σύνολο τιμών της είναι:

$h([0,1]) \xrightarrow[\text{γν. φθ.}]{\text{h συνεχής}} [h(1), h(0)] = [0, 1]$

Αφού η h είναι γν. φθίνουσα στο $[0, 1]$ θα είναι

και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

$y = (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$

Συνεπώς $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$

B3 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

i) Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών

Για $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} =$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}}{(1-\cancel{\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

οπότε η φ είναι συνεχής στο 1. Τελικά η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$

$\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$, οπότε $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ

ii) Θέτουμε $K(x) = \varphi(x) - \eta\mu\alpha$ τότε $K(x)=0$

- η K είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $\left.\begin{aligned} K(0) &= \varphi(0) - \eta\mu\alpha = 1 - \eta\mu\alpha > 0 \\ K(1) &= \varphi(1) - \eta\mu\alpha = \frac{1}{2} - \eta\mu\alpha < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K(0)\cdot K(1) < 0$

διότι:

$\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]]{\eta\mu \times \nearrow} \eta\mu\dfrac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1.$

Από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$

τ.ω $K(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$

ΘΕΜΑ Γ

$\boxed{Γ1}$ Αν $x<-1$ τότε, $f(x)=-2x+c_1$

Αν $x>-1$ τότε, $f(x)=x^3-x+c_2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στην θέση -1

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-}(-2x+c_1)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^3-x+c_2)$

$\Leftrightarrow +2+c_1=c_2$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x\leq -1\\ x^3-x+2+c_1, & x>-1\end{cases}$

Αφού η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ισχύει: $f(0)=0 \Leftrightarrow 2+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-2$

οπότε: $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leq -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

$\boxed{Γ2}$ $ε: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$

Το $(0,-2)$ είναι σημείο της $(ε)$, οπότε την επαληθεύει

οπότε: $-2-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(0-x_0) \Leftrightarrow$

$-2-x_0^3+\cancel{x_0}=-3x_0^3+\cancel{x_0} \Leftrightarrow \cancel{2}x_0^3=\cancel{2} \Leftrightarrow$

$x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1>-1$ δεκτό.

Άρα $ε: y=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2$

$\boxed{\Gamma 3}$ $M(x, 2x-2)$, $K(x,0)$, $\Gamma(2,0)$

$$E(x) = \frac{(x-2)(2x-2)}{2} = \frac{(x-2)\cdot \cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$E(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - x - 2x + 2 \Rightarrow$$

$$E(x) = x^2 - 3x + 2$$

$x = x(t)$, οποτε $E(t) = [x(t)]^2 - 3x(t) + 2$, $x > 2$

$$E'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 3x'(t)$$

Για $t = t_0$: $E'(t_0) = 2x(t_0)\cdot x'(t_0) - 3x'(t_0)$

$E'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2$

$E'(t_0) = 12 - 6 \Rightarrow$

$E'(t_0) = 6$ μονάδες/sec.

Γ4

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}+\frac{x^3-x}{1-x^3}\right]$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(-2x-2)}{(-2x-2)} \underset{\substack{u\to+\infty\\ x\to-\infty}}{\overset{u=-2x-2}{=\!=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\cdot\eta\mu u=0$

διότι: $\left|\frac{1}{u}\cdot\eta\mu u\right| \overset{u>0}{=} \frac{1}{u}\cdot|\eta\mu u| \leq \frac{1}{u} \Rightarrow$

$-\frac{1}{u}\leq\frac{1}{u}\cdot\eta\mu u\leq\frac{1}{u}$ με: $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}-\frac{1}{u}=0$

Από κριτήριο παρεμβολής: $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\cdot\eta\mu u=0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-x}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-1)=-1.$

Συνεπώς: $L=0+(-1)=-1.$

Θέμα Δ

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x) = x - \ln 3x$,

Δ1) i) $f'(x) = 1 - \frac{1}{\cancel{3}x}\cdot\cancel{3} = 1 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

• για $x<1$: $\Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \iff 1 - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

• για $x>1$ $\Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \iff 1 - \frac{1}{x} > 0 \iff f'(x) > 0$

x	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$

$f((0,1]) \underset{\text{συν}}{\overset{f\downarrow}{=}} [f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)) = [1-\ln 3, +\infty)$

Άρα $\exists\, x_1 \in (0,1)$ τ.ω. $f(x_1) = 0$

$f([1,+\infty)) \underset{\text{συν}}{\overset{f\uparrow}{=}} [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) \overset{(*)}{=} [1-\ln 3, +\infty)$

$(*)\ \lim_{x\to+\infty}(x - \ln 3x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \underbrace{\frac{\ln 3x}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty.$

Άρα $\exists\, x_2 \in (1,+\infty)$ τ.ω. $f(x_2) = 0$.

Αυτά διότι $1-\ln 3<0$. Πράγματι $1-\ln 3<0$

$\iff 1<\ln 3 \iff \ln e<\ln 3 \iff e<3$ που ισχύει

Δ2) Για $x_1 \le x \le 1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1) \ge f(x) \Rightarrow 0 \ge f(x) \Rightarrow f(x) \le 0$

Για $1 \le x \le x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(x_2) \Rightarrow f(x) \le 0$

Οπότε $f(x) \le 0$ για $x \in [x_1, x_2]$

$$E(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x - \ln 3x)\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \ln 3x\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln 3x\,dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$\left[x \ln 3x\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{3x}} \cdot \cancel{3}\,dx - \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right) =$$

$$x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} =$$

$$x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} =$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) =$$

$$\frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} - (x_2 - x_1) =$$

$$(x_2 - x_1) \cdot \left(\frac{x_2 + x_1}{2} - 1\right) =$$

$$(x_2 - x_1) \cdot \frac{(x_2 + x_1 - 2)}{2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

Δ3) $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - 1 \Leftrightarrow$

$2 - x_1 > 1$

Αρκεί ν.δ. ότι $f(2-x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2-x_1) < f(x_2)$

$$\xLeftrightarrow[x_2 \geq 1]{2-x_1 \geq 1} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$$

$f \nearrow$

Όμως $E = \dfrac{(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)}{2} > 0 \xLeftrightarrow[x_2 - x_1 > 0]{x_1 < x_2}$

$$x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$$

Δ4) Ισχύει ότι $f(1) = 1 - \ln 3$. Οπότε η εξίσωση γράφεται:

$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$2f(x) + \ln 3 - 1 = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$2f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2)$

Έστω $A(x_2, f(x_2))$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι:

$\varepsilon: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \xLeftarrow{f(x_2)=0}$

$y = f'(x_2)(x - x_2)$

Αφού η f είναι κυρτή ισχύει: ①

$f(x) \geq (\varepsilon) \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$

Η f έχει στο $x=1$ ολικό ελάχιστο το $f(1)$

αυτηνώ: $f(x) \geq f(1)$ (2) και η ισότητα ισχύει μόνο

για $x=1$

Από (1), (2) έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq f'(x_2)(x-x_2) \\ f(x)-f(1) \geq 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{(+)}$$

$2f(x)-f(1) \geq f'(x_2)(x-x_2)$ στη οποία δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη