ΘΕΜΑ Α

A1| Θεωρία σελ 186 σχολικό

A2| Θεωρία σελ 142 σχολικό

A3| Θεωρία σελ 161 σχολικό

A4| α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1 $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g$ και $g(x) \in D_f\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ και $\sqrt{x} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0$ και $x \leq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Άρα $D_{f\circ g} = [0,1]$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x}^2 - 1)^2 = (x-1)^2$

Β2 $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$ συνεχής ως πολυωνυμική

η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και

$h'(x) = 2(x-1) < 0$ για $x \in (0,1)$. Άρα h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ καθώς h συνεχής στο $[0,1]$

Το σύνολο τιμών της είναι:

$h([0,1]) \xrightarrow[\text{γν. φθ.}]{\text{h συνεχής}} [h(1), h(0)] = [0,1]$

Αφού η h είναι γν. φθίνουσα στο $[0,1]$ θα είναι και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

$y = (x-1)^2 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow 1-x = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$

Συνεπώς $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$, $x \in [0,1]$

B3 $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

i) Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών

Για $x=1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} =$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}}{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

οπότε η φ είναι συνεχής στο 1. Τελικά η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$

$\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$, οπότε $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ

ii) Θέτουμε $K(x) = \varphi(x) - ημα$ ώστε $K(x) = 0$

- η K είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $\left.\begin{array}{l} K(0) = \varphi(0) - ημα = 1 - ημα > 0 \\ K(1) = \varphi(1) - ημα = \dfrac{1}{2} - ημα < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow K(0)\cdot K(1) < 0$

διότι:

$\dfrac{\pi}{6} < α < \dfrac{\pi}{2} \xLeftrightarrow[\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]]{ημ \nearrow} ημ\dfrac{\pi}{6} < ημα < ημ\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2} < ημα < 1.$

Από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$

τ.ω $K(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_0) = ημα$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Αν $x<-1$ τότε, $f(x)=-2x+c_1$

Αν $x>-1$ τότε, $f(x)=x^3-x+c_2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στην θέση -1

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to-1^-}(-2x+c_1)=\lim_{x\to-1^+}(x^3-x+c_2)$

$\Leftrightarrow +2+c_1=c_2$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x\le-1\\ x^3-x+2+c_1, & x>-1\end{cases}$

Αφού η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ισχύει: $f(0)=0 \Leftrightarrow 2+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-2$

οπότε: $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Γ2) $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$

Το $(0,-2)$ είναι σημείο της (ε), οπότε την επαληθεύει

οπότε: $-2-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(0-x_0) \Leftrightarrow$

$-2-x_0^3+\cancel{x_0}=-3x_0^3+\cancel{x_0} \Leftrightarrow \cancel{2}x_0^3=\cancel{2} \Leftrightarrow$

$x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1>-1$ δεκτό.

Άρα $\varepsilon: y=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2$

Γ3 $M(x, 2x-2)$, $K(x, 0)$, $\Gamma(2, 0)$

$$E(x) = \frac{(x-2)(2x-2)}{2} = \frac{(x-2)\cdot \cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$E(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - x - 2x + 2 \Rightarrow$$

$$E(x) = x^2 - 3x + 2$$

$x = x(t)$, οπότε $E(t) = [x(t)]^2 - 3x(t) + 2$, $x > 2$

$$E'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 3x'(t)$$

Για $t = t_0$: $E'(t_0) = 2x(t_0)\cdot x'(t_0) - 3x'(t_0)$

$$E'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2$$

$$E'(t_0) = 12 - 6 \Rightarrow$$

$E'(t_0) = 6$ μονάδες/sec

Γ4

$$L=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{ημ f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{ημ(-2x-2)}{-2x-2}+\frac{x^3-x}{1-x^3}\right]$$

• $$\lim_{x\to-\infty}\frac{ημ(-2x-2)}{(-2x-2)}\ \underset{\substack{u\to+\infty\\x\to-\infty}}{\overset{u=-2x-2}{=\!=}}\ \lim_{u\to+\infty}\frac{ημu}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\cdot ημu=0$$

διότι: $$\left|\frac{1}{u}\cdot ημu\right|\overset{u>0}{=\!=}\frac{1}{u}\cdot|ημu|\le\frac{1}{u}\Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{u}\le\frac{1}{u}\cdot ημu\le\frac{1}{u}$$ με: $$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=\lim_{u\to+\infty}-\frac{1}{u}=0$$

Από κριτήριο παρεμβολής: $\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}\cdot ημu=0$

• $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-x^3}=\lim_{x\to-\infty}(-1)=-1.$$

Συνεπώς: $L=0+(-1)=-1.$

Θέμα Δ

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=x-\ln 3x$,

Δ1) i) $f'(x)=1-\dfrac{1}{\cancel{3}x}\cdot\cancel{3}=1-\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0 \iff x=1$

- για $x<1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}>1 \iff 1-\dfrac{1}{x}<0 \Rightarrow f'(x)<0$
- για $x>1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}<1 \iff 1-\dfrac{1}{x}>0 \iff f'(x)>0$

x	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	ο.ε.	$\nearrow$

$$f((0,1])\ \underset{\text{συν}}{\overset{f\downarrow}{=}}\ \left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$$

Άρα $\exists\, x_1\in(0,1)$ τ.ω. $f(x_1)=0$

$$f([1,+\infty))\ \underset{\text{συν}}{\overset{f\uparrow}{=}}\ \left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{\circledast}{=}[1-\ln 3,+\infty)$$

$$\circledast\ \lim_{x\to+\infty}(x-\ln 3x)=\lim_{x\to+\infty}x\Big(1-\underbrace{\frac{\ln 3x}{x}}_{\to 0}\Big)=+\infty\cdot 1=+\infty.$$

Άρα $\exists\, x_2\in(1,+\infty)$ τ.ω. $f(x_2)=0$.

Αυτά διότι $1-\ln 3<0$. Πράγματι $1-\ln 3<0$

$\iff 1<\ln 3 \iff \ln e<\ln 3 \iff e<3$ που ισχύει.

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f(x)$ κυρτή $(0,+\infty)$.

) Η συνάρτηση μεταξύ των δύο ριζών x_1, x_2 διατηρεί πρόσημο, και μάλιστα αρνητικό αφού $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$. Άρα

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} |x - \ln 3x|\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (-x + \ln 3x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + x\ln 3x - x\right]_{x_1}^{x_2} \cancel{= \left[-\frac{x^2}{2} + x(\ln 3x - 1)\right]}$$

$$\cancel{= -\frac{x_2^2}{2} + x_2\ln 3x_2 - x_2 + \frac{x_1^2}{2} - x_1\ln 3x_1 + x_1}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_2(\ln 3x_2 - 1) - x_1(\ln 3x_1 - 1)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_2(x_2 - 1) - x_1(x_1 - 1)}$$

$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ln 3x_1$

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \ln 3x_2$

$$= -\frac{x_2^2}{2} + x_2 \underbrace{\ln 3x_2}_{x_2} - x_2 + \frac{x_1^2}{2} - x_1 \underbrace{\ln 3x_1}_{x_1} + x_1$$

$$= -\frac{x_2^2}{2} + x_2^2 - x_2 + \frac{x_1^2}{2} - x_1^2 + x_1$$

$$= \frac{x_2^2}{2} - x_2 - \frac{x_1^2}{2} + x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1)$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2).$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)[\ ]}$$

$A_3)$ <u>Ν.δ.ο.</u> $f(2-x_1)<0$

$x_1<1 \iff -x_1>-1 \iff 2-x_1>1$

$\overset{f \nearrow (1,+\infty)}{\iff} f(2-x_1)>f(1)>0$

Άρα $f(2-x_1)>0$

$A_4)$ $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$

Θέτουμε $h(x)=2f(x)+\ln 3-1-f'(x_2)(x-x_2)$

- h συνεχής στο $[x_1,x_2]$
- $h(x_1)=\cancel{2f(x_1)}^{0}+\underbrace{(\ln 3-1)}_{>0}-\underbrace{f'(x_1)}_{>0}\underbrace{(x_1-x_2)}_{<0}>0 \quad >0$

$h(x_2)=\cancel{2f(x_2)}^{0}-(\ln 3-1-\cancel{f'(x_2)(x_2-x_2)}^{0}$

$=-\ln 3-1<0$

Από Θ.Β. $\exists\, x_0\in(x_1,x_2)$ τ.ω. $h'(x_0)=0$

$\iff$ η εξίσωση που δίνεται να έχει λύση.